**2.3 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI)**

Um sistema é dito invariante no tempo se para cada par estado-entrada-saída

Veja esta equação no livro, página 11;

Isso significa que se o estado inicial for deslocado para o tempo t0 +T e a mesma forma de onda de entrada for aplicada de t0 + T em vez de t0, então a forma de onda de saída será a mesma, exceto que começa a aparecer a partir do tempo t0 + T. Em outras palavras, se o estado inicial e a entrada forem os mesmos, não importa em que momento eles sejam aplicados, a forma de onda de saída será sempre a mesma. Portanto, para sistemas invariantes no tempo, podemos sempre assumir, sem perda de generalidade, que t0 = 0. Se um sistema não é invariante no tempo, diz-se que varia no tempo.

A invariância de tempo é definida para sistemas, não para sinais. Os sinais variam principalmente no tempo. Se um sinal é invariante no tempo como u(t) = 1 para todo t, então é um sinal muito simples ou trivial. As características dos sistemas invariantes no tempo devem ser independentes do tempo. Por exemplo, a rede da Fig. 2.2 é invariante no tempo se Ri, Ci e Li forem constantes.

Alguns sistemas físicos devem ser modelados como sistemas variantes no tempo. Por exemplo, um foguete em chamas é um sistema variável no tempo, porque sua massa diminui rapidamente com o tempo. Embora o desempenho de um automóvel ou de um aparelho de TV possa se deteriorar por um longo período de tempo, suas características não mudam consideravelmente nos primeiros dois anos. Assim, um grande número de sistemas físicos pode ser modelado como sistemas invariantes no tempo durante um período de tempo limitado.

**Descrição de entrada-saída**: A resposta de estado zero de um sistema linear pode ser descrita por (2.4). Agora, se o sistema também é invariante no tempo, então temos

Veja esta equação no livro, página 12;

para qualquer T. Assim (2.4) reduz-se a

Veja esta equação no livro, página 12; (E:2.8)

onde substituímos t0 por 0. A segunda igualdade pode ser facilmente verificada alterando a variável. A integração em (2.8) é chamada de integral de convolução. Ao contrário do caso variante no tempo em que g é uma função de duas variáveis, g é uma função de uma única variável no caso invariante no tempo. Por definição g(t) = g(t − 0) é a saída no tempo t devido a uma entrada de impulso aplicada no tempo 0. A condição para que um sistema linear invariante no tempo seja causal é g(t) = 0 para t < 0.

**Exemplo 2.2:** O sistema de atraso unitário estudado no Exemplo 2.1 é um dispositivo cuja saída é igual à entrada atrasada em 1 segundo. Se aplicarmos o impulso δ(t) no terminal de entrada, a saída será δ(t − 1). Assim, a resposta ao impulso do sistema é δ(t − 1).

**Exemplo 2.3**: Considere o sistema de feedback unitário mostrado na Fig. 2.5(a). Consiste em um multiplicador com ganho a e um elemento de atraso de tempo unitário. É um sistema SISO. Seja r(t) a entrada do sistema de realimentação. Se r(t) = δ(t), então a saída é a resposta ao impulso do sistema de realimentação e é igual

Veja esta equação no livro, página 12; (E:2.9)

Seja r(t) qualquer entrada com r(t) ≡ 0 para t < 0; então a saída é dada por

Veja esta equação no livro, página 12;

Como o sistema de atraso de unidade de tempo é distribuído, o sistema de realimentação também o é.

Veja esta figura no livro, página 12; (E:2.5)

**Matriz de função de transferência**: A transformada de Laplace é uma ferramenta importante no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI). Seja y(s) a transformada de Laplace de y(t), ou seja,

Veja esta equação no livro, página 13;

Ao longo deste texto, usamos uma variável com um acento circunflexo para denotar a transformada de Laplace da variável. Para sistemas causais, temos g(t) = 0 para t < 0 ou g(t − τ) = 0 para τ>t. Assim, o limite superior de integração em (2.8) pode ser substituído por ∞. Substituindo (2.8) e trocando a ordem das integrações, obtemos

Veja esta equação no livro, página 13;

que se torna, após a introdução da nova variável v = t − τ,

Veja esta equação no livro, página 13;

Novamente usando a condição de causalidade para substituir o limite inferior de integração dentro dos parênteses de v = −τ para v = 0, a integração se torna independente de τ e as integrações duplas se tornam

Veja esta equação no livro, página 13;

ou

Veja esta equação no livro, página 13; (E:2.10)

onde

Veja esta equação no livro, página 13;

é chamada de função de transferência do sistema. Assim, a função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso e, inversamente, a resposta ao impulso é a transformada de Laplace inversa da função de transferência. Vemos que a transformada de Laplace transforma a integral de convolução em (2.8) na equação algébrica em (2.10). Em análise e projeto, é mais simples usar equações algébricas do que usar convoluções. Assim, a convolução em (2.8) raramente será usada no restante deste texto.

Para um sistema p-entrada q-saída, (2.10) pode ser estendido como

Veja esta equação no livro, página 13;

ou

Veja esta equação no livro, página 13; (E:2.11)

onde gij (s) é a função de transferência da j-ésima entrada para a i-ésima saída. A matriz q × p Gˆ (s) é chamada de matriz de função de transferência ou, simplesmente, matriz de transferência do sistema.

**Exemplo 2.4** Considere o sistema de atraso de unidade de tempo estudado no Exemplo 2.2. Sua resposta ao impulso é δ(t − 1). Portanto, sua função de transferência é

Veja esta equação no livro, página 14;

Esta função de transferência é uma função irracional de s.

**Exemplo 2.5** Considere o sistema de realimentação mostrado na Fig. 2.5(a). A função de transferência do elemento de atraso de tempo unitário é e−s. A função de transferência de r para y pode ser calculada diretamente do diagrama de blocos como

Veja esta equação no livro, página 14; (E:2.12)

Isso também pode ser obtido tomando a transformada de Laplace da resposta ao impulso, que foi calculada em (2.9) como

Veja esta equação no livro, página 14;

Como L[δ(t − i)] = e−is, a transformada de Laplace de gf (t) é

Veja esta equação no livro, página 14;

Usando

Veja esta equação no livro, página 14;

para |r| < 1, podemos expressar a série infinita na forma fechada como

Veja esta equação no livro, página 14;

que é o mesmo que (2.12).

A função de transferência em (2.12) é uma função irracional de s. Isso ocorre porque o sistema de feedback é um sistema distribuído. Se um sistema linear invariante no tempo for agrupado, sua função de transferência será uma função racional de s. Estudamos principalmente sistemas agrupados; assim, as funções de transferência que encontraremos são principalmente funções racionais de s.

Toda função de transferência racional pode ser expressa como g(s) = N(s)/D(s), onde N(s) e D(s) são polinômios de s. Vamos usar deg para denotar o grau de um polinômio. Então g(s) pode ser classificado da seguinte forma:

● g(s) ˆ próprio ⇔ deg D(s) ≥ deg N (s) ⇔ ˆg(∞) = constante zero ou diferente de zero.

● g(s) ˆ estritamente adequado ⇔ deg D(s) > deg N (s) ⇔ ˆg(∞) = 0.

● g(s) ˆ bi próprio ⇔ deg D(s) = deg N (s) ⇔ ˆg(∞) = constante diferente de zero.

● g(s) ˆ impróprio ⇔ grau D(s) < grau N (s) ⇔|ˆg(∞)|=∞.

Funções de transferência racionais inadequados amplificarão o ruído de alta frequência, que geralmente existe no mundo real; portanto, funções de transferência racionais impróprios raramente surgem na prática.

Um número real ou complexo λ é chamado de pólo da função de transferência própria g(s) ˆ = N(s)/D(s) se | ˆg(λ)|=∞; a zero se g(λ) ˆ = 0. Se N (s) e D(s) são primos, ou seja, não têm fatores comuns de grau 1 ou superior, então todas as raízes de N (s) são os zeros de g (s) ˆ, e todas as raízes de D(s) são os pólos de g(s) ˆ. Em termos de pólos e zeros, a função de transferência pode ser expressa como

Veja esta equação no livro, página 15;

Isso é chamado de forma de ganho de pólo zero. No MATLAB, esta forma pode ser obtida da função de transferência chamando *[z,p,k]= tf2zp(num,den).*

Uma matriz racional Gˆ (s) é dita própria se todas as suas entradas forem próprias ou se Gˆ (∞) for uma matriz constante zero ou diferente de zero; ela é estritamente própria se todas as suas entradas forem estritamente próprias ou se Gˆ (∞) for uma matriz zero. Se uma matriz racional Gˆ (s) é quadrada e se Gˆ (s) e Gˆ −1(s) são próprios, então Gˆ (s) é dito bi próprio. Chamamos λ de pólo de Gˆ (s) se for um pólo de alguma entrada de Gˆ (s). Assim, cada pólo de cada entrada de Gˆ (s) é um pólo de Gˆ (s). Existem várias maneiras de definir zeros para Gˆ (s). Chamamos λ de zero de bloqueio se for um zero de cada entrada diferente de zero de Gˆ (s). Uma definição mais útil é o zero de transmissão, que será apresentado no Capítulo 9.

**Equação do espaço de estados:** Todo sistema concentrado linear invariante no tempo pode ser descrito por um conjunto de equações da forma

Veja esta equação no livro, página 15; (E:2.13)

Para um sistema com p entradas, q saídas e n variáveis ​​de estado, A, B, C e D são, respectivamente, n × n, n × p, q × n e q × p matrizes constantes. Aplicando a transformada de Laplace para (2.13) produz

Veja esta equação no livro, página 15;

que implica

Veja esta equação no livro, página 15; (E:2.14)

Veja esta equação no livro, página 15; (E:2.15)

São equações algébricas. Dados x(0) e uˆ(s), xˆ(s) e yˆ(s) podem ser calculados algebricamente a partir de (2.14) e (2.15). Suas transformadas inversas de Laplace produzem as respostas de tempo x(t) e y(t). As equações também revelam o fato de que a resposta de um sistema linear pode ser decomposta como a resposta de estado zero e a resposta de entrada zero. Se o estado inicial x(0) é zero, então (2.15) se reduz a

Veja esta equação no livro, página 16;

Comparando isso com (2.11) produz

Veja esta equação no livro, página 16; (E:2.16)

Isso relaciona a entrada-saída (ou matriz de transferência) e as descrições do espaço de estados.

As funções *tf2ss* e *ss2tf* no MATLAB calculam uma descrição da outra. Eles computam apenas os casos SISO e SIMO. Por exemplo, [num,den]= ss2tf(a,b,c,d,1) calcula a matriz de transferência da primeira entrada para todas as saídas ou, equivalentemente, a primeira coluna de Gˆ(s). Se o último argumento 1 em ss2tf(a,b,c,d,1) for substituído por 3, então a função gera a terceira coluna de Gˆ(s).

Para concluir esta seção, mencionamos que a transformada de Laplace não é usada no estudo de sistemas lineares variantes no tempo. A transformada de Laplace de g(t, τ ) é uma função de duas variáveis ​​e L[A(t)x(t)] = L[A(t)]L[x(t)]; assim a transformada de Laplace não oferece nenhuma vantagem e não é usado no estudo de sistemas variantes no tempo.

**2.3.1 Implementação do Circuito Op-Amp**

Cada equação de espaço de estado linear invariante no tempo (LTI) pode ser implementada usando um circuito amplificador operacional (op-amp). A Figura 2.6 mostra dois elementos de circuito de amplificador operacional padrão. Todas as entradas são conectadas, através de resistores, ao terminal inversor. Não são mostrados o terminal não inversor aterrado e a fonte de alimentação. Se o ramo de realimentação for um resistor como mostrado na Fig. 2.6(a), então a saída do elemento é − (ax1+bx2+cx3). Se o ramo de feedback for um capacitor com capacitância C e RC = 1 como mostrado na Fig. 2.6(b), e se a saída for atribuída como x, então x˙ = − (av1 +bv2 +cv3). Chamamos o primeiro elemento de somador; o segundo elemento, um integrador. Na verdade, o somador funciona também como multiplicador e o integrador também funciona como multiplicador e somador. Se usarmos apenas uma entrada, digamos, x1, na Fig. 2.6(a), então a saída é igual a −ax1, e o elemento pode ser usado como um inversor com ganho a. Agora usamos um exemplo para mostrar que toda equação de espaço de estados LTI pode ser implementada usando os dois tipos de elementos na Fig. 2.6.

Considere a equação de estado

Veja esta equação no livro, página 16; (E:2.17)

Veja esta equação no livro, página 17; (E:2.18)

Tem dimensão 2 e precisamos de dois integradores para implementá-lo. Temos a liberdade de escolher a saída de cada integrador como +xi ou −xi. Suponha que atribuímos a saída do integrador do lado esquerdo (LHS) como x1 e a saída do integrador do lado direito (RHS) como −x2 como mostrado na Fig. 2.7. Então a entrada do integrador LHS deve ser, a partir da primeira equação de (2.17), − ˙x1 = −2x1 + 0,3x2 + 2u e está conectado como mostrado. A entrada do integrador RHS deve ser x˙2 = x1 − 8x2 e é conectada conforme mostrado. Se a saída do somador for escolhida como y, então sua entrada deve ser igual a −y = 2x1 − 3x2 − 5u, e é conectada conforme mostrado. Assim, a equação de estado em (2.17) e (2.18) pode ser implementada como mostrado na Fig. 2.7. Observe que há muitas maneiras de implementar a mesma equação. Por exemplo, se atribuirmos as saídas dos dois integradores na Fig. 2.7 como x1 e x2, em vez de x1 e −x2, obteremos uma implementação diferente.

Em circuitos amplificadores operacionais reais, a faixa de sinais é limitada, geralmente 1 ou 2 volts abaixo da tensão fornecida. Se qualquer sinal crescer fora da faixa, o circuito saturará ou queimará e o circuito não se comportará como a equação dita. Há, no entanto, uma maneira de lidar com esse problema, como discutiremos na Seção 4.3.1.

**2.4 Linearização**

A maioria dos sistemas físicos são não lineares e variam no tempo. Alguns deles podem ser descritos pela equação diferencial não linear da forma

Veja esta equação no livro, página 18; (E:2.19)

Veja esta equação no livro, página 18;

onde h e f são funções não lineares. O comportamento de tais equações pode ser muito complicado e seu estudo está além do escopo deste texto.

Algumas equações não lineares, entretanto, podem ser aproximadas por equações lineares sob certas condições. Suponha que para alguma função de entrada uo(t) e algum estado inicial, xo(t) seja a solução de (2.19); isso é,

Veja esta equação no livro, página 18; (E:2.20)

Agora suponha que a entrada seja levemente perturbada para se tornar uo(t) + u¯(t) e o estado inicial também seja levemente perturbado. Para algumas equações não lineares, a solução correspondente pode diferir apenas ligeiramente de xo(t). Neste caso, a solução pode ser expressa como xo(t) + x¯(t) com x¯(t) pequeno para todo t. Sob essa suposição, podemos expandir (2.19) como

Veja esta equação no livro, página 18; (E:2.21)

onde, para h = [h1 h2 h3]', x = [x1 x2 x3]' e u = [u1 u2]',

Veja esta equação no livro, página 18;

Veja esta equação no livro, página 18;

Eles são chamados jacobinos. Como A e B são calculados ao longo das duas funções de tempo xo(t) e uo(t), eles são, em geral, funções de t. Usando (2.20) e desprezando potências mais altas de x¯ e u¯, podemos reduzir (2.21) a

Veja esta equação no livro, página 18;

Esta é uma equação linear do espaço de estados. A equação y(t) = f(x(t), u(t), t) pode ser linearizada de forma semelhante. Esta técnica de linearização é frequentemente usada na prática para obter equações lineares.